2003 $\boxed{3}$ (問題)

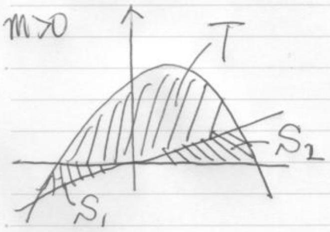
放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $A(a,0)$, $B(b,0)$ とし C と直線 $y=mx$ の共有点を $P(\alpha, m\alpha)$, $Q(\beta, m\beta)$, 原点を O とする。ただし $a<b$, $m\neq 0$, $\alpha<\beta$ とする。線分OP, OAとCで囲まれた図形の面積と線分OQ, OBとCで囲まれた図形の面積が等しいとき, m の値を求めよ。

2003年は, $\boxed{1}$(1) と $\boxed{3}$ しか出来ないと思います。$\boxed{1}$(2) と $\boxed{2}$ を初見で解くのはとても難しいです。
だから, $\boxed{3}$ を落とすことは死につながります.
制限時間は 45分です.

2003 [3] (解答)

$C: y=f(x)=-x^2+2x+1$ —①, $y=g(x)=mx$ —② とする.

$m>0$

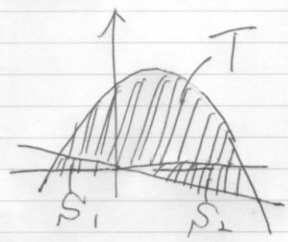


OP, OA, Cで囲まれた面積をS_1,
OQ, OB, Cで囲まれた面積をS_2,
OA, OQ, Cで囲まれた面積をTとする.

$f(x)$の2解が$a, b\ (a<b)$であり，また

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

より $a=1-\sqrt{2},\ b=1+\sqrt{2}$ で $f(x)=-(x-a)(x-b)$



$m>0$のとき

$T+S_2=\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b (x-a)(x-b)dx=\frac{(b-a)^3}{6}=\frac{(2\sqrt{2})^3}{6}$

$m<0$のとき 同様にして

$T+S_1=\frac{(2\sqrt{2})^3}{6}$

$f(x)-g(x)=-x^2+2x+1-mx=-x^2+(2-m)x+1=0$ のとき

$x=\frac{2-m\pm\sqrt{D}}{2}$ $(D=(2-m)^2+4=m^2-4m+8)$

題意より ①②の共有点のx座標が $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ より

$\alpha=\frac{2-m-\sqrt{D}}{2}$ $\beta=\frac{2-m+\sqrt{D}}{2}$

だから, $f(x)-g(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$m>0$のとき

$T+S_1=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{(\sqrt{D})^3}{6}$

$m<0$のとき 同様にして

$T+S_2=\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\right)^3$

∴ $m>0$のとき $S_1+T=\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\right)^3$, $S_2+T=\left(\frac{2\sqrt{2}}{6}\right)^3$

$m<0$のとき $S_1+T=\left(\frac{2\sqrt{2}}{6}\right)^3$, $S_2+T=\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\right)^3$

∴ $m>0$, $m<0$ のどちらの場合も

$S_1=S_2 \Leftrightarrow S_1+T=S_2+T$

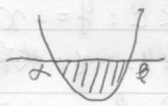
$\Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{6}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{D}}{6}\right)^3$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}=\sqrt{D} \Leftrightarrow 8=m^2-4m+8$

$\Leftrightarrow m(m-4)=0 \Leftrightarrow m=4\ (\because m\neq 0)$

公式

・$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$



ポイント

・図を書こう

・図に着眼して，無駄な計算をしないように！

・無駄な所，類似な所はできるだけ省いて
時間を短くしよう。